

Série 7 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Matrice triangulaire, déterminant*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Montrer qu'un produit de matrices $n \times n$ triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Sol.: Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times n$ triangulaires supérieures, c'est-à-dire telles que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $j < i$. Le coefficient ij du produit AB est donné par

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Comme A et B sont triangulaires supérieures, on a $b_{\ell j} = 0$ pour les $\ell = 1, \dots, j-1$ et $a_{i\ell} = 0$ pour les $\ell = i+1, \dots, n$. Donc, si l'on prend une paire d'indices ij pour laquelle $j > i$, on aura $a_{i\ell} b_{\ell j} = 0$ pour tout $\ell = 1, \dots, n$, et donc $c_{ij} = 0$. Ceci montre que AB est triangulaire supérieure.

Pour un produit quelconque de matrices triangulaires supérieures A_1, \dots, A_n , on procède par récurrence : on a montré ci-dessus que $A_1 A_2$ est triangulaire supérieure, donc $A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3$ l'est aussi, etc.

Exercice 2

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T .

Sol.:

a) Pour A à D .

A : L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.

On développe par rapport à la première colonne de A . On obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B : On développe par rapport à la deuxième colonne de B : $\det B = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det B = 0$.

C : On développe par rapport à la troisième colonne de C : $\det C = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det C = 0$.

D : On développe par rapport à la première colonne de D . On obtient

$$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

E : On développe par rapport à la première colonne de E . On obtient

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

b) La transposition ne change pas la valeur du déterminant. Les résultats sont les mêmes qu'au a).

Exercice 3

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: On calcule le déterminant de A . Ensuite, pour faire le moins de calculs possible, on réalise des opérations élémentaires sur la matrice A pour obtenir les matrices B , C et D . Ceci revient à multiplier A par des matrices élémentaires. On a exhibé à l'exercice 4 les effets multiplicatifs sur le déterminant de A qui en résultent.

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -9,$$

$$\det B = 2 \det A = -18, (L_1 \leftarrow 2L_1)$$

$$\det C = -\det A = 9, (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\det D = \det A = -9. (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

Exercice 4

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Sol.:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{échelonnement partiel (ne modifie pas le det)}} \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 0 & c_2 - c_1 & c_2^2 - c_1^2 \\ 0 & c_3 - c_2 & c_3^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det A = \det A^T = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Ainsi, A est inversible si et seulement si $c_i \neq c_j$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$, avec $i \neq j$.

En général, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$ s'appelle un déterminant

de Vandermonde (à noter que la forme typique de la matrice de Vandermonde est A^T , qui a bien entendu le même déterminant que A).

Exercice 5

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Sol.: Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les mêmes, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d $\det(A^T) = \det(A) = 0$. On peut donc conclure dans tous les cas $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1 . En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A , la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. Ainsi $\det(A) = 0$.

Exercice 6

Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Sol.:

- $t = 7$. En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en ajoutant la seconde ligne à la première ce qui ne change pas le déterminant.
- $s = 14$. En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en multipliant la deuxième ligne par 2, ce qui multiplie également le déterminant par 2, puis en ajoutant la première ligne à la seconde, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. ce qui ne change pas le déterminant.

Exercice 7

Montrer que

- si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = 1/\det A$,
- si A et P sont des matrices carrées, avec P inversible, alors $\det(PAP^{-1}) = \det A$,

- c) si U est une matrice carrée telle que $U^T U = I$ (on dit que U est une matrice *orthogonale*), alors $\det U = \pm 1$;
- d) si A est une matrice carrée telle que $\det(A^4) = 0$, alors A ne peut pas être inversible.

Sol.:

- a) Nous avons vu cela en cours. Si A est une matrice inversible, alors

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1$$

Ainsi $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

- b) Si A et P sont des matrices carrées, avec P inversible, alors

$$\det(PAP^{-1}) = \det P \cdot \det A \cdot \det(P^{-1}) = \det P \cdot \det(P)^{-1} \cdot \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

- c) Si U est une matrice orthogonale, alors $U^T U = I$. Par conséquent

$$1 = \det I_n = \det(U^T U) = \det(U^T) \cdot \det U = \det U \cdot \det U = (\det U)^2$$

où nous avons utilisé le fait que la transposition ne modifie pas le déterminant. Par conséquent $\det U = \pm 1$.

- d) Comme $(\det A)^4 = \det(A^4) = 0$, alors $\det A$ est aussi nul. Ainsi A ne peut pas être inversible.

Exercice 8

- Soient A, B deux matrices $n \times n$. Prouver les affirmations suivantes ou trouver un contre-exemple
 - A ou B singulière $\Rightarrow AB$ singulière
 - AB inversible $\Rightarrow A, B$ inversibles
- Soient A, B deux matrices. Prouver ou trouver un contre-exemple

$$AB \text{ inversible} \Rightarrow A, B \text{ inversibles}$$

Sol.:

- On a $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Supposons que A est singulière, on a $\det(A) = 0$ ainsi $\det(AB) = 0$. Donc AB est singulière car $\det(AB) = 0$.
 - AB est inversible, donc il existe une matrice X $n \times n$ telle que $(AB)X = X(AB) = I_n$. On obtient $A(BX) = I_n$ et A est inversible. De même $(XA)B = I_n$ implique B est inversible. Méthode avec les déterminants : on a $\det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$.
- Pour la deuxième partie : A et B ne sont pas forcément carrées. Ainsi en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $AB = I_2$ mais A et B sont singulières car elles sont de tailles 2×3 et 3×2 respectivement.

Exercice 9

Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Sol.: L'aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est donnée par la valeur absolue du déterminant de la matrice formée par ces vecteurs :

$$\text{Aire} = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$$

Avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -2 - 1 = -3$$

Par conséquent, l'aire du parallélogramme est :

$$\text{Aire} = |-3| = 3 \text{ unités}^2$$

Exercice 10

Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: Le volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} est donné par la valeur absolue du déterminant de la matrice formée par ces vecteurs :

$$\text{Volume} = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne :

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 - 10) - 0 + 1 \cdot (-2 - 0)$$

$$= 1 \cdot (-9) + 1 \cdot (-2) = -9 - 2 = -11$$

Par conséquent, le volume du parallélépipède est :

$$\text{Volume} = |-11| = 11 \text{ unités}^3$$

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A , alors $\det B = \det A$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

- a) Faux. Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A , alors $\det B = -\det A$ en général.
Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\det A = 1$ et $\det B = -1$.
- b) Vrai. Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors la matrice A n'est pas inversible et par un résultat du cours on a que $\det A = 0$.
- c) Faux. Le déterminant de A n'est pas égal au produit des éléments diagonaux de A comme le montre l'exemple de la matrice B ci-dessus.
- d) Faux. Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors $\det(A)^{13} = 0$ et donc $\det(A) = 0$ ce qui montre que A n'est pas inversible.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

- a) Vrai. Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = -\det(A)$ (en échangeant les deux lignes qui sont égales) et donc $\det A = 0$.

- b) Faux. Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = \det(A)^3 = 2^3 = 8 \neq 6$.
- c) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det A = 2$ et $\det B = 5$, tandis que $\det(A + B) = 18$.
- d) Faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée triangulaire inférieure, mais A n'est pas inversible.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

- a) Vrai. Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors en développant successivement par rapport à la 1ère ligne, 2ème, jusqu'à la n -ème on obtient bien le produit des éléments de sa diagonale.
- b) Faux. D'après un théorème on a que $\det A^T = \det A$ pour toute matrice carrée A .
- c) Faux. Par un théorème du cours, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- d) Vrai. Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. En effet, la matrice kA s'obtient en multipliant chaque ligne de A par le nombre k . Puisqu'il y a n lignes on aura donc multiplié le déterminant de A par $\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{n \text{ fois}} = k^n$.

Exercice 14

- a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3 . On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3 . On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors
- $\det D = 30 \det A \det B$;
- $\det D = -60 \det A \det B$;
- $\det D = 90 \det A \det B$;
- $\det D = -120 \det A \det B$.
- b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3 . On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A , puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

- $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
- $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;
- $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
- $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Sol.:

- a) $\det D = -120 \det A \det B$.

En effet le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $5 \cdot (-3)$ par linéarité du déterminant comme fonction d'une ligne, puis d'une colonne. Le déterminant de la matrice $2B$ vaut $2^3 \det B$ car on multiplie chacune des trois lignes par 2. Il faut ainsi multiplier $\det A \cdot \det B$ par $-15 \cdot 8 = -120$.

- b) $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

En effet, le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $4^3 \cdot (-1)$, par linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes et puisque le déterminant change de signe lorsque l'on échange deux lignes. Le déterminant de D vaut 4 fois celui de B , par linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne et parce que ajouter tant de fois une colonne à une autre ne change pas le déterminant. De plus, $\det(D^{-1}) = \det(D)^{-1}$ et ainsi

$$\det(C \cdot D^{-1}) = \det(C) \cdot \det(D^{-1}) = -4^3 \det(A) \cdot (4 \det(B))^{-1} = -16 \det(A) \cdot (\det(B))^{-1}$$

Exercice 15

Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors A est singulière si

- $a \notin \{1, -1\}$
- $a \in \{1, -1\}$
- $a \in \{1, 3\}$
- $a \notin \{1, 3\}$

Sol.: Si $a = \pm 1$ alors le déterminant vaut zéro et la matrice est singulière.

Exercices additionnels

Exercice 16

Montrer qu'une matrice X (2×2) qui commute avec toutes les matrices A (2×2) est un multiple de l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda I_n$.

Indication : Poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis utiliser quelques matrices A bien choisies.

Sol.: Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme X doit commuter avec toute matrice 2×2 , on doit par exemple avoir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De là on conclut que $b = c = 0$, et donc notre matrice est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on recommence

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

qui implique $a = d$. Donc

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_n.$$

Exercice 17

Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Sol.: Posons $C := I_n + A + A^2$. On calcule

$$(I_n - A)C = C - AC = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

De même,

$$C(I_n - A) = C - CA = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

Ceci implique bien que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par C .

Exercice 18

Soit A est une matrice carrée triangulaire supérieure de taille $n \times n$.

1. Démontrer que si A est inversible, alors l'inverse A^{-1} est aussi une matrice carrée triangulaire supérieure. on pourra se baser sur la méthode d'inversion basée sur l'algorithme de Gauss.
2. Sous quelle(s) condition(s) une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ? On s'intéressera aux coefficients diagonaux.

Sol.:

1. Soit A une matrice carrée triangulaire supérieure inversible, donc déjà échelonnée. Si on réduit la matrice augmentée $(A|I)$ pour calculer A^{-1} , on ne détruit pas les zéros en dessous de la diagonale à droite. Alors le côté droit reste une matrice triangulaire supérieure lors de chaque opération et le résultat A^{-1} est une matrice carrée triangulaire supérieure.
2. Une matrice triangulaire supérieure est déjà sous forme échelonnée. Il suffit donc que la matrice soit carrée ($n \times n$) et que de plus tous les éléments de la diagonale soient non nuls (pour qu'il y ait n pivots) pour qu'elle soit inversible.

Exercice 19

Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.

Sol.: *Méthode 1 :* On utilise qu'une matrice carrée M est inversible si et seulement si le système $M\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique pour tout \vec{b} .

- Cas 1. Supposons la matrice A non inversible. Comme A est carrée, il existe un vecteur \vec{b} tel que le système $A\vec{y} = \vec{b}$ ne possède pas de solution. Ensuite, en posant $\vec{y} = B\vec{x}$, le système $AB\vec{x} = \vec{b}$ ne possède pas de solution, et AB n'est pas inversible.
- Cas 2. Supposons la matrice carrée B non inversible. Il existe un vecteur $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ tel que $B\vec{x}_0 = \vec{0}$. Ensuite, on a $AB\vec{x}_0 = \vec{0}$, ce qui montre que la solution du système $AB\vec{x} = \vec{0}$ n'est pas unique. Ainsi, AB est non inversible.

Méthode 2 : Nous allons montrer la contraposée : si AB est inversible, alors A et B sont inversibles. En effet, si AB est inversible, son inverse $C = (AB)^{-1}$ vérifie les égalités

$$ABC = I_n, \quad CAB = I_n.$$

De la première égalité on déduit que A est inversible d'inverse BC , et de la seconde on déduit que B est inversible d'inverse CA .

Méthode 3 : On utilise la propriété du déterminant $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ainsi, si $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$, alors $\det(AB) = 0$. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'où le résultat.

Exercice 20

- a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

- b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

- c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend-t-il de l'angle φ ? Pourquoi?

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Sol.:

- a) 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne.
- b) Premier déterminant : 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant : a^3 .
- c) $\det A = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ est indépendant de l'angle φ . Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété $\det A = 1$.
- d) $\det B = 0$, donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Exercice 21

Montrer :

- a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
- b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det(QAQ^{-1}) = \det A$.
- c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.
- d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Sol.:

- a) On a $1 = \det I_n = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$. Ainsi, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
- b) C'est une conséquence de a) (à noter qu'il n'est pas nécessaire que A soit inversible) :

$$\det(QAQ^{-1}) = \det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

- c) (De telles matrices U s'appellent des matrices orthogonales). On a $1 = \det I_n = \det(U^T U) = \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2$. Ainsi, $(\det U)^2 = 1$, d'où $\det U = \pm 1$.
- d) On a $\det A^3 = (\det A)^3$. Ainsi, $(\det A)^3 = 0$ ssi $\det A = 0$, ce qui équivaut au fait que la matrice A est non inversible.

Exercice 22

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et E une matrice élémentaire de taille $n \times n$. Montrer que $\det(EA) = \zeta \det A$, où

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ représente l'opération "addition sur une ligne de} \\ & \text{A d'un multiple d'une autre ligne de A";} \\ -1 & \text{si } E \text{ permute deux lignes de A;} \\ \alpha & \text{si } E \text{ multiplie une ligne de A par } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

On fera la preuve de ce théorème **sans** utiliser le fait que $\zeta = \det E$.

Sol.:

On démontre le théorème par récurrence sur la taille de la matrice. On vérifie d'abord le résultat pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille 2×2 . Les matrices élémentaires sont

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, E_{12}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{21}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule : $\det(E_{12}A) = \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -\det A$. On vérifie de manière similaire le résultat pour les autres matrices élémentaires.

On suppose que le résultat est vrai pour des matrices de taille $k \times k$ où $k \geq 2$. Soit $n = k + 1$ et A une matrice carrée de taille $n \times n$. L'opération associée à E modifie au plus deux lignes de la matrice A . Comme $n \geq 3$, il existe une ligne i de A qui n'est pas modifiée par l'opération E . On note A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j , et de même, on note B_{ij} la matrice obtenue à partir de EA en supprimant la ligne i et la colonne j . On développe en cofacteurs le déterminant de la matrice EA par rapport à la ligne i :

$$\det(EA) = a_{i1}(-1)^{i+1} \det B_{i1} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det B_{in}.$$

On observe que la matrice B_{ij} (de taille $k \times k$) s'obtient à partir de A_{ij} (de même taille) en effectuant une opération élémentaire. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\det B_{ij} = \zeta \det A_{ij}$, avec $\zeta = 1, -1$ ou α respectivement selon la matrice E . Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(EA) &= \zeta a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + \dots + \zeta a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in} \\ &= \zeta \det A. \end{aligned}$$

Le résultat $\det(EA) = \zeta \det A$ est donc démontré pour des matrices de taille $n \times n$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

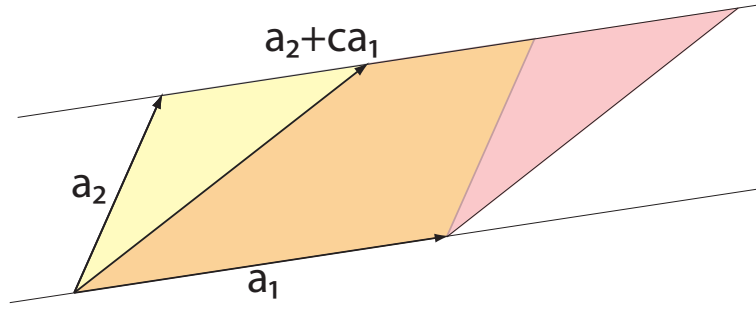
Exercice 23

- Soient \vec{a}_1 et \vec{a}_2 deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 . Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 est la même que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a}_1 et $\vec{a}_2 + c\vec{a}_1$, où $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire.
- Montrer que si A est une matrice de taille 2×2 , alors l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det A|$.

Indications : Se rappeler que $A = (A^T)^T$ et que $\det A^T = \det A$, et essayer de se ramener au cas des matrices diagonales.

Sol.:

- L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur. Les parallélogrammes ont la même base et une hauteur identique, donc la même aire.



- b) On va prouver que pour toute matrice B de taille 2×2 , l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs lignes de B est égale à $|\det B|$. Il suffira ensuite, pour A matrice quelconque de taille 2×2 , d'appliquer ce résultat à $B = A^T$, en se rappelant que $\det A^T = \det A$. On traite à part le cas où la matrice B n'est pas inversible, i.e. $\det B = 0$. Dans ce cas, les vecteurs lignes de B sont obligatoirement des multiples, et l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs est alors nulle. L'assertion est donc vraie dans ce cas. On suppose désormais que la matrice B est inversible, i.e. $\det B \neq 0$. En notant $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a forcément $a \neq 0$ ou $c \neq 0$. On s'intéresse au cas $a \neq 0$, le cas $c \neq 0$ se traite de la même manière en effectuant une permutation des lignes 1 et 2, opération élémentaire qui ne modifie pas $|\det B|$ ni l'aire du parallélogramme associé. Pour une matrice diagonale (inversible) de taille 2×2 de la forme $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$, on a $|\det \tilde{B}| = |\tilde{a}\tilde{d}| (\neq 0)$ et $|\tilde{a}\tilde{d}|$ est clairement l'aire du rectangle associé. On doit désormais démontrer qu'on peut transformer toute matrice B inversible de taille 2×2 en une matrice diagonale (inversible) sans changer $|\det B|$ ou l'aire du parallélogramme associé. On sait que les opérations élémentaires utilisées pour transformer B en une matrice diagonale (ajouter à une ligne α fois une autre ligne) ne changent pas $|\det B|$. Par ailleurs, d'après la question a), les opérations élémentaires (sur les lignes) ne changent pas non plus l'aire du parallélogramme associé. Par conséquent, on peut transformer toute matrice B inversible de taille 2×2 en une matrice diagonale (inversible) sans changer $|\det B|$ ou l'aire du parallélogramme associé. Ces deux quantités étant égales pour les matrices diagonales, ceci conclut la preuve.

Exercice 24

Montrer "à la main" que pour deux matrices 2×2 quelconques, A et B ,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Sol.: Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ &= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) \\ &= adeh - adgf - bceh + bcgf \\ &= (ad - bc)(eh - gf) \\ &= \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

Exercice 25

Calculer les déterminants des matrices $n \times n$ ci-dessous.

$$X_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_n := \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & & n \\ n & n & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{bmatrix}$$

Sol.: En soustrayant à la première colonne la somme des $n - 1$ autres :

$$\det(X_n) = \det \begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 - n.$$

(Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.)

En soustrayant la dernière colonne à chacune des $n - 1$ premières, on obtient

$$\det(Y_n) = \det \begin{bmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \ddots & & n \\ 0 & 0 & 3-n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{bmatrix} = (1-n)(2-n)\cdots 2 \cdot 1 \cdot n = (-1)^{n-1}n!.$$